

第五章 数的存储与组织

第60课 数组序号的利用

《信息学奥赛一本通·编程启蒙 C++版》

一、计数排序

计数排序是一个非基于比较的排序算法，元素从未排序状态变为已排序状态的过程，是由额外空间的辅助和元素本身的值决定的。该算法于 1954 年由 Harold H. Seward 提出。它的优势在于在对一定范围内的整数排序时，它的复杂度为 $O(n+k)$ （其中 k 是整数的范围），快于任何比较排序算法。

先假设 20 个数列为： $\{9, 3, 5, 4, 9, 1, 2, 7, 8, 1, 3, 6, 5, 3, 4, 0, 10, 9, 7, 9\}$ 。

让我们先遍历这个无序的随机数组，找出最大值为 10 和最小值为 0。这样我们对应的计数范围将是 $0 \sim 10$ 。然后每一个整数按照其值对号入座，对应数组下标的元素进行加 1 操作。

比如第一个整数是 9，那么数组下标为 9 的元素加 1，如下图所示。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	第 二 个 整 数 是 3， 那 么 数
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	组 下 标 为 3 的 元 素 加 1， 如 下 图 所 示。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	继 续 遍 历 数 列 并 修 改 数
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	组。最 终，数 列 遍 历 完 毕 时， 数 组 的 状 态 如 下 图。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	数 组 中 的 每 一 个 值， 代 表
1	2	1	3	2	2	1	2	1	4	1	了 数 列 中 对 应 整 数 的 出 现 次 数。

有了这个统计结果，排序就很简单了，直接遍历数组，输出数组元素的下标值，元素的值是几，就输出几次。比如统计结果中的 1 为 2，就是数列中有 2 个 1 的意思。这样我们就得到最终排序好的结果。

0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 10

二、埃式素数筛选

首先 1 不是素数，如果 $n > 1$ ，则枚举 $[1, \sqrt{n}]$ 范围内的素数进行试除，如果至少有一个素数能够整除，则表明 n 是合数，否则是素数。 $[1, \sqrt{n}]$ 范围内的素数可以通过“筛选法”预先筛出来，用一个数组 $f[i]$ 标记 i 是素数与否，筛选法有很多种，例如：埃氏筛法、欧氏（欧拉）筛法、厄拉多塞筛法。这里介绍一种最常用的筛选法——Eratosthenes 筛选法。

用一个标记数组 $f[\max n]$ ，其中 $f[i]=0$ 代表 i 为素数，否则为非素数。首先，因为 0 和 1 都不是素数，所以，标记 $f[0]=f[1]=1$ 。

1、从未被标记的数中找到最小的数，为 2，它不是任何（1 或者 它本身）数的倍数，所以 2 是素数，并且这时候，我们将 4、6、8、10、... 等 2 的倍数的 $f[i]$ 都标记为 1；

2、从未被标记的数中找到最小的数，3，它也是素数，这时候，我们将 6、9、12、... 等 3 的倍数的 $f[i]$ 都标记为 1；

3、从未被标记的数中找到最小的数，5，它也是素数，这时候，我们将 10、15、20、... 等 5 的倍数的 $f[i]$ 都标记为 1；

4、从未被标记的数中找到最小的数，7，它也是素数，这时候，我们将 14、21、28、... 等 7 的倍数的 $f[i]$ 都标记为 1；

.....

通过这种方式，遍历完标记数组 $f[i]$ ，如果没有被标记为 1 的数，就是素数了。

【例 60.1】 整数去重

【题目描述】

给定含有 n 个整数的序列，要求对这个序列进行去重操作。所谓去重，是指对这个序列中每个重复出现的数，只保留该数第一次出现的位置，删除其余位置。

【输入格式】

输入包含两行：

第一行包含一个正整数 n ($1 \leq n \leq 200000$)，表示第二行序列中数字的个数；

第二行包含 n 个整数，整数之间以一个空格分开。每个整数大于等于 0、小于等于 100,000。

【输出格式】

输出只有一行，按照输入的顺序输出其中不重复的数字，整数之间用一个空格分开。

【样例输入】

```
5
10 12 93 12 75
```

【样例输出】

```
10 12 93 75
```

【代码实现】

```
1. #include<bits/stdc++.h>
2. using namespace std;
3. int n,a[100005],x;
4. int main(){
5.     scanf("%d",&n);
6.     for(int i=1;i<=n;i++) {
7.         scanf("%d",&x);
8.         if(a[x]==0) {
9.             cout<<x<<" ";
10.            a[x]=1;
11.        }
12.    }
13.    return 0;
14.}
```

【例 60.2】 约瑟夫问题

【题目描述】

传说约瑟夫当年活下来就是靠快速计算这个问题。

n 个人围成一圈，编号依次为 $1, 2, 3 \cdots n$ 。从第一个人开始报数，数到 m 的人出列，再由下一个人重新从 1 开始报数，数到 m 的人再出圈。以此类推，直到所有的人都出列。请输出依次出圈人的编号。

【输入格式】

两个整数 n, m $1 \leq n, m \leq 100$ 。

【输出格式】

n 个用空格分隔的整数，表示出圈人的编号。

【样例输入】

6 4

【样例输出】

4 2 1 3 6 5

【代码实现】

```
1. #include<iostream>
2. using namespace std;
3. main()
4. {
5.     bool a[101]={0};
6.     int n,m,i,f=0,t=0,s=0;
7.     cin>>n>>m;
8.     do
9.     {
10.         ++t;//逐个枚举圈中的所有位置
11.         if(t>n)
12.             t=1;//数组模拟环状,最后一个与第一个相连
13.         if(!a[t])
14.             s++;//第t个位置上有人则报数
15.         if(s==m)//当前报的数是m
16.         {
17.             s=0;//计数器清零
18.             cout<<t<<' ';//输出被杀人编号
19.             a[t]=1;//此处人已死,设置为空
20.             f++;//死亡人数+1
21.         }
22.     }while(f!=n);//直到所有人都被杀死为止
23.     return 0;
24. }
```

【例 60.3】 找素数

【题目描述】

输出正整数 a 到 b 之间的所有素数。

【输入格式】

输入 a, b 。对于所有数据， $1 \leq a \leq b \leq 20000$

【输出格式】

由小到大，输出 a 到 b 之间的所有素数。每个数占一行。

【样例输入】

5 10

【样例输出】

5

7

【代码实现】

```
1. #include<iostream>
2. using namespace std;
3. #define maxn 5000001
4. #define ll long long
5. bool f[maxn];
6. int a,b;
7. void findPrimes(int n){
8.     int i;
9.     int cnt = 0;
10.    ll j;
11.    f[0] = f[1] = 1;
12.    for(i = 2; i <= n; ++i) {
13.        if(!f[i]) {
14.            for(j = (ll)i * i; j <= n; j += i) {
15.                f[j] = 1;
16.            }
17.        }
18.    }
19.    return ;
20.}
21.main()
22.{
23.    cin>>a>>b;
24.    findPrimes(b);
25.    for(int i=a;i<=b;i++)
26.        if(!f[i]) cout<<i<<endl;
27.    return 0;
28.}
```

练 60.1 丢失的数字

【题目描述】

给你 m 个 1 到 n 之间的整数，你能找出 1 到 n 中的哪些整数没有出现吗？

【输入格式】

第一行 2 个整数 n, m ，直接用空格分隔 ($1 \leq n \leq 100000, m < n$)，表示有 m 个 1 到 n 之间的整数。接下来 m 行，每行一个整数 a_i ($1 \leq a_i \leq n$ ，数据保证 m 个数都不相同)。

【输出格式】

每行 1 个数，从小到大输出输入数据中没有出现过的 1 到 n 中的整数。

【样例输入】

5 3

3

1

4

【样例输出】

2

5

【代码实现】

```
1. #include<bits/stdc++.h>
2. using namespace std;
3. int a[100005],m,n,id;
4. int main(){
5.     cin>>n>>m;
6.     for(int i=1;i<=m;i++){
7.         cin>>id;
8.         a[id]++;
9.     }
10.    for(int i=1;i<=n;i++)
11.        if(a[i]==0)cout<<i<<endl;
12.    return 0;
13.}
```

练 60.2 众数

【题目描述】

对于一个长度为 n 的序列 $\{a_n\}$ 来说,其众数被定义为出现次数最多的数。

现在给定一个长度为 n 的序列,请帮忙求出它的众数是多少。

当然众数可能有多个,你只需要输出最小的一个就可以了。

【输入格式】

第一行输入 n , 第二行输入 n 个数, $n < 10^6, 0 \leq a_i \leq 1000$ 。

【输出格式】

输出众数。

【样例输入】

6

3 5 7 5 3 1

【样例输出】

3

【代码实现】

```
1. #include<bits/stdc++.h>
2. using namespace std;
3. int cnt[1005],n, ai,maxi;
4. int main(){
5.     scanf("%d", &n);
6.     for (int i = 0; i < n; i++){
7.         scanf("%d", &ai);
8.         cnt[ai]++;
9.     }
10.    maxi = 1;
11.    for (int i = 2; i <= 1000; i++)
12.        if (cnt[i] > cnt[maxi]) maxi = i;
13.    printf("%d\n", maxi);
14.    return 0;
15.}
```

练 60.3 余数个数

【题目描述】

给出 10 个整数，问这些整数 mod 42 后有多少个不同的余数。

【输入格式】

输入共 10 行，每行一个不超过 10^9 的正整数。

【输出格式】

一个整数，表示不同的余数个数。

【样例输入】

39

40

41

42

43

44

82

83

84

85

【样例输出】

6

【代码实现】

```
1. #include<bits/stdc++.h>
2. using namespace std;
3. int x,tong[45],ans;
4. int main(){
5.     for(int i=1;i<=10;i++){
6.         cin>>x;
7.         tong[x%42]++;
8.     }
9.     for(int i=0;i<=41;i++){
10.        if(tong[i]) ans++;
11.    }
12.    cout<<ans;
13.    return 0;
14.}
```

练 60.4 捉迷藏(趣味编程)

【题目描述】

一座山上有 **10** 个山洞，一天，格莱尔和尼克在山上玩捉迷藏游戏。尼克说：“我先把 **10** 个山洞从 **1-10** 编上号，你从 **10** 号洞出发，先从 **1** 号洞找我，第二次隔一个洞找我，第三次隔 **2** 个洞找我，以后以此类推，次数不限。”格莱尔同意了，但她从早到晚进洞 **1000** 次，也没找到尼克。试编一个程序，算一算兔子尼克可能躲在几号洞内。

【输入格式】

无。

【输出格式】

从小到大输出兔子尼克可能躲在山洞的号数，每行一个。

【样例输入】

无

【样例输出】

2

4

7

9

【代码实现】

```
1. #include<iostream>
2. using namespace std;
3. int main(){
4.     bool a[11];
5.     int i,cishu;
6.     for (int i=1;i<=10;i++){
7.         a[i]=true; //初始化
8.     }
9.     i=0;
10.    cishu=1;
11.    while (cishu<=1000){
12.        i=(i+cishu)%10;
13.        if (i==0) i=10;
14.        a[i]=false;
15.        cishu++; //次数加一
16.    }
17.    for (int i=1;i<=10;i++){
18.        if (a[i]) cout<<i<<endl;//(a[i])表示是否a[i]为真
19.    }
20.    return 0;
21.}
```

练 60.5 素数筛选

【题目描述】

试编一个程序，用筛数法输出 **100** 以内所有的素数，并统计个数。

【输入格式】

无。

【输出格式】

100 以内所有的素数，并在下一行统计出素数个数。

【样例输入】

无

【样例输出】

```
2    3    5    7    11   13   17   19   23   29
31   37   41   43   47   53   59   61   67   71
73   79   83   89   97
```

100 以内的素数个数: 25

【代码实现】

```
1. #include<iostream>
2. #include<cstdio>
3. #include<cstring>
4. #include<math.h>
5. #include<algorithm>
6. using namespace std;
7. int main(){
8.     bool a[101];
9.     int i,j,num;
10.    for (int i=2;i<=100;i++){
11.        a[i]=true;
12.    }
13.    a[0]=a[1]=false;
14.    i=1;
15.    do{
16.        i++;
17.        if (a[i]){
18.            for (j=2;j<=100/i;j++){ //枚举
19.                a[i*j]=false; //做上标记
20.            }
21.        }
22.    }while (i<100);
23.    num=0;
24.    for (int i=1;i<=100;i++){
25.        if (a[i]){
26.            printf("%6d",i);
27.            num++;
28.            if (num%10==0) cout<<endl;
29.        }
30.    }
31.    cout<<endl;
32.    cout<<"100 以内的素数个数: "<<num<<endl;
33.    return 0;
34.}
```

练 60.6 胡萝卜与骨头(趣味编程)

【题目描述】

尼克喜欢胡萝卜，格莱尔喜欢骨头。15 根胡萝卜和 15 根骨头拍成一圈，狐狸老师要求尼克从某一根开始 1-9 数数，逢 9 取出，直至剩下 15 根骨头位置，试编一程序，算一算如何排列，才是剩下的全是骨头。

【输入格式】

无。

【输出格式】

输出骨头所在的位置。

【样例输入】

无

【样例输出】

1 2 3 4 10 11 13 14 15 17 20 21 25 28 29

【代码实现】

```
1. #include<iostream>
2. using namespace std;
3. int main(){
4.     int i,a[31],num=0,k=0;
5.     for (int i=1;i<=30;i++){
6.         a[i]=0;
7.     }
8.     while (num<15){                //枚举判断
9.         for (int i=1;i<=30;i++){
10.            if (a[i]==1)continue;
11.            k++;
12.            if (k==9){
13.                a[i]=1;
14.                k=0;
15.                num++;
16.                if (num==15)break; //判断是否骨头已经摆放完了
17.            }
18.        }
19.    }
20.    //cout<<"骨头所在的位置: ";
21.    for (int i=1;i<=30;i++){
22.        if (!a[i]) cout<<i<<' ';
23.    }
24.    return 0;
25.}
```

谢谢！

—